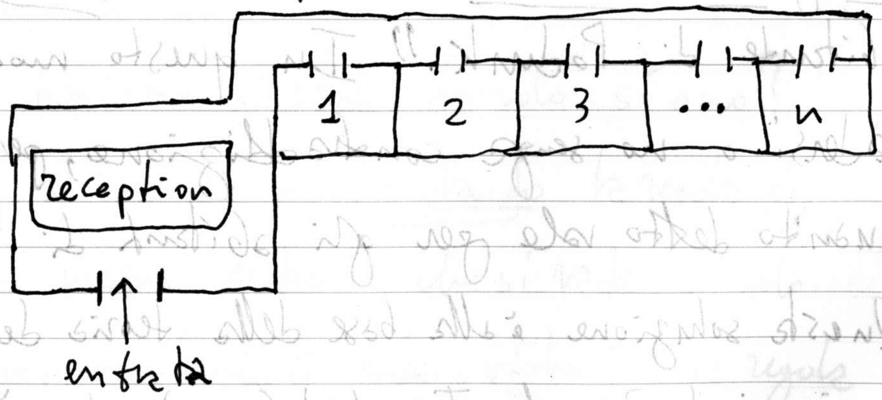
IL METODO DIAGONALE DI CANTOR SPIEGATO MEDIANTE L'ALBERGO DI HILBERT

fonti: Raymond Smullyan, *Satana, Cantor e l'infinito*, Bompiani 1992 + conversazione con Marco Benini.

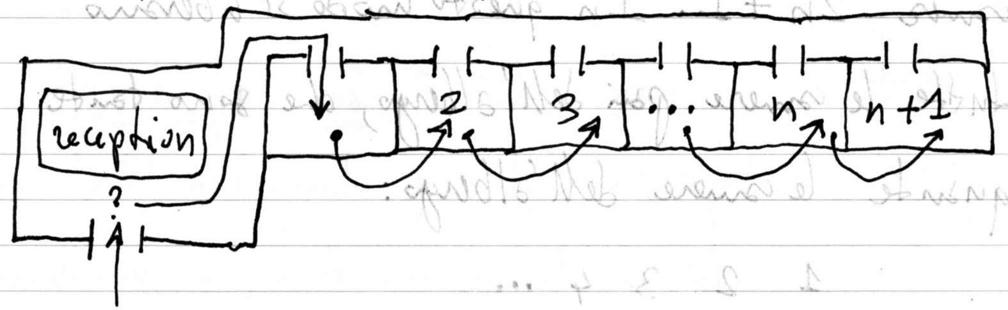
L'albergo di Hilbert ha un numero infinito di camere, tante quanti sono i numeri naturali. Ogni camera è numerata con un numero naturale, e può contenere al massimo un ospite. L'albergo naturalmente ha una reception.



Problema 1: L'albergo è pieno. Arriva un cliente e chiede una stanza. È possibile

trovargliela?

Soluzione problema 1: sì, basta chiedere all'ospite della ~~stanza~~ camera 1 di andare nella camera 2, l'ospite 2 nella camera 3, e così via, l'ospite in n andrà nella camera n+1. La camera 1 si è liberata per il nuovo ospite.



Se invece di un cliente ne arrivano 100'000, basterà farli spostare, gli ospiti attuali, di 100'000 camere. Il discorso non cambia.

Problema 2: L'albergo è pieno come prima. Arriva alla reception un pullman di Hilbert, il quale è pieno e ha tanti sedili quanti i naturali.

È possibile sistemare i turisti del pullman nell'albergo?

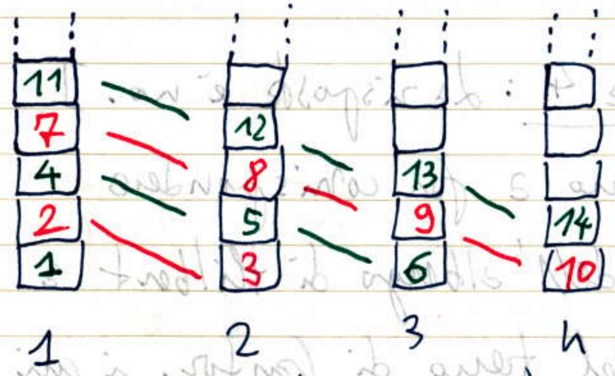
Soluzione problema 2: la risposta è sì. Basta chiedere all'ospite della camera 1 di andare nella camera 3, l'ospite della camera 2 di andare nella camera 5, l'ospite della camera n nella camera 2n+1. In questo modo si liberano tutte le camere pari dell'albergo, che sono tante quante le camere dell'albergo:

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 2n \end{array}$$

Problema 3: L'albergo questa volta è vuoto, ma alla reception devono lavorare molto: è arrivato un treno di Hilbert. Il treno ha infiniti vagoni tanti quanti i numeri naturali. Nel vagone 1 ci sono turisti in biciclette, nel vagone 2

ci sono turisti in tandem (2 persone per tandem), nel vagone 3 ci sono turisti in apecar (3 posti), nel vagone 4 ci sono turisti in auto a 4 posti, e così via, nel vagone n ci sono veicoli a n posti. Naturalmente, ogni vagone ha n turisti. È possibile ospitarli nell'albergo?

Soluzione problema 3: la risposta è sì, basta contarli nel modo giusto. I receptionist li mettono in questo modo sul piazzale:



(biciclette) (tandem) (apecar) (veicoli n posti)

I numeri verdi e rossi indicano le diagonali per contare le file in un tempo n. Lo vedete?

Di qui, si capisce perché il metodo si chiama <u>diagonale</u>.

<u>Problema 4</u>: L'albergo di Hilbert è vuoto. Adesso arriva il treno di Cantor, che ha un solo vagone, e tanti sedili quanti i numeri reali compresi fra 0 e 1, con zero estremo escluso, e 1 estremo incluso. Posso ospitare i turisti del treno di Cantor nell'albergo di Hilbert?

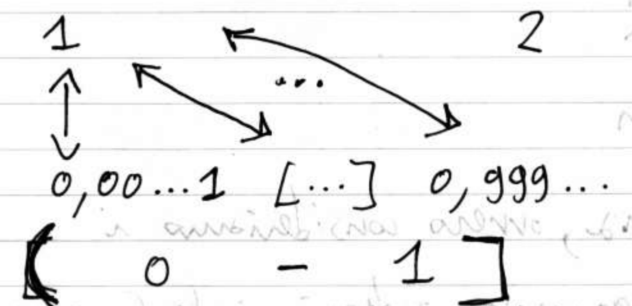
~~Soluzione pro~~

<u>Risposta problema 4</u>: La risposta è no. I receptionist provano a far corrispondere ciascuna camera dell'albergo di Hilbert a ciascun sedile del treno di Cantor, i cui numeri sono nella forma seguente: 0,abc.... con a prima cifra decimale, b la seconda, ecc.

Se scelgo come candidato alla camera 1 il turista sul sedile seguente:

- la prima cifra a sia diversa da 0
- la seconda cifra b sia diversa da 1 [...]
- la decima cifra j sia diversa da 9

è sempre possibile trovare un candidato nuovo <u>più vicino</u> allo zero del candidato attuale per occupare la camera 1! Ergo, l'infinito dei numeri reali è più grande di quello dell'infinito dei numeri naturali.



Quali sono le conseguenze per l'informatica a livello teorico?

OSSERVAZIONI SULL'INFORMATICA TEORICA DERIVANTI DAI RISULTATI DI CANTOR

Consideriamo $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ un alfabeto di caratteri finito con il quale intendiamo scrivere dei programmi (se preferite, prendete l'insieme dei caratteri ASCII).

Prendiamo un esercito di scimmie che battano le dita sulla tastiera a esso per scrivere tutte le combinazioni possibili del nostro alfabeto.

Consideriamo il diagramma seguente, già visto:

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & & n \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \dots & \uparrow \\ 2 & 4 & 6 & & 2n \end{array}$$

come un programma, ovvero consideriamo i programmi come ~~[illegible]~~ astrazioni di funzione. Dopo un tempo infinito (tanto quanto i naturali),

l'esercito di scimmie termina il suo compito.

Avremo:

- un insieme infinito (quanto i naturali) di stringhe dell'alfabeto A che chiameremo S
- un insieme infinito (quanto i naturali) di programmi validi (corretti sintatticamente) scritti in A, che chiameremo P
- l'insieme infinito P è un sottoinsieme di S, poiché non tutte le stringhe in A sono programmi.

C'è di peggio: il Problema 4 (il treno di Cantor) ci mostra che esistono funzioni ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~ che non sono in P, cioè che non sono scrivibili come programmi.

Domande: - come sono fatte le funzioni (non) scrivibili come programmi?
- quali sono le funzioni che posso effettivamente calcolare?

Con Cantor nasce l'informatica teorica, che intende rispondere a queste due domande.
Vedremo come risponderanno ~~[illegible]~~ Alonzo Church, Alan Turing e Kurt Gödel.

Varese, 5 nov 2011