Le origini del calcolo digitale – 3

Epistemologia, Deontologia ed Etica dell'Informatica
Storia dell'Informatica e della Comunicazione Digitale

Federico Gobbo
federico.gobbo@uninsubria.it
CRII – Centro di Ricerca "Informatica Interattiva"
Università dell'Insubria, Varese–Como

A.A. 2010-11

Dalle ruote dentate all'energia

Nel Settecento, il secolo dei Lumi, c'è un forte avanzamento delle scienze naturali, che sono applicative. Cade il dogma dell'*ancien régime* e l'Europa comincia a secolarizzarsi: grandi polemiche suscita il fatto che la parola 'popolo' viene prima di 're' nell'*Encyclopedie* di Diderot e D'Alembert, la prima enciclopedia, che impone come normativo per la classificazione del sapere il modello a scala.

L'Inghilterra si impone come potenza coloniale mondiale: la tecnologia caratterizzante non è piú la ruota dentata, ma l'energia fornita dalla macchina a vapore, dal carbone e dal motore a scoppio. Nell'Ottocento l'interesse per le scienze matematiche pure riaffiora, e si prosegue dalle idee del Seicento di Leibniz, in parte rimanendo nel vecchio paradigma della ruota dentata.

Figura: Caroline von Ansbach, regina consorte di Gran Bretagna

Da Leibniz a Samuel Clarcke

La regina Caroline, avendo incontrato Leibniz da giovane, cerca per tutta la vita di portarlo a Londra, ma si scontra contro lo sciovinismo inglese a favore di Newton e con le pretese del Duca di Hannover su Leibniz. Riesce a far tradurre in inglese parte delle opere leibniziane da parte di Samuel Clarke, in contatto epistolare con il tedesco su una prova di dimostrazione dell'esistenza di Dio.

Circa un secolo e mezzo dopo, Boole dimostra l'efficacia del suo metodo usando la prova dell'esistenza di Dio di Clarke come esempio.

George Boole

George Boole (1815–1864) nasce da famiglia povera e fallisce nella carriera ecclesiastica perché (si dice) non smetteva mai di fare matematica, anche in chiesa e di domenica, materia imparata sui testi di Laplace e Lagrange. Studia da autodidatta greco, latino, francese, tedesco, italiano.

Durante il soggiorno presso la chiesa metodista, gli viene l'idea che è possibile esprimere le relazioni logiche in forma algebrica. Scrive diversi articoli sul *Cambridge Mathematical Journal* e vince la medaglia d'oro per il suo paper su *Philosophical Transactions of the Royal Society*, nonostante sia un totale outsider.

L'indagine sulle Leggi del Pensiero

Diventa amico di Augustus De Morgan, la cui diatriba con Sir William Hamilton lo stimola a pubblicare il proprio lavoro sulla logica. Boole condivide con Leibniz la fiducia che trovando un formalismo migliore si possa trovare la soluzione ai problemi aperti. Dall'incipit del suo testo fondamentale, *An Investigation of the Laws of Thought, on which are Founded the Mathematical Theories of Logic and Probability* (1854):

> *Scopo di questo trattato è d'indagare le leggi fondamentali di quelle operazioni della mente per mezzo delle quali si attua il ragionamento; di dar loro espressione nel linguaggio simbolico di un calcolo [e di ricavarne] alcune indicazioni probabili sulla natura e la costituzione della mente umana (Boole 1976:9).*

L'indagine sulle Leggi del Pensiero

Riprendiamo gli esempi di sillogismi aristotelici (Davis 2000:34).

- Tutte le piante sono vive.
- Nessun ippopotamo è intelligente.
- Alcune persone parlano italiano.

L'indagine sulle Leggi del Pensiero

Riprendiamo gli esempi di sillogismi aristotelici (Davis 2000:34).

- Tutte le piante sono vive.
- Nessun ippopotamo è intelligente.
- Alcune persone parlano italiano.

Boole considera nel calcolo logico le parole 'vive', 'ippopotamo' e 'persone' indicanti la **classe o collezione** di tutti gli individui descritti dalla parola in questione: la *classe* degli organismi viventi, la *classe* degli ippopotami, la *classe* delle persone. Il concetto di classe ricorda il dizionario di John Wilkins.

Le lettere per le classi

Boole usa le lettere per rappresentare le classi, come sono state usate da Leibniz per rappresentare numeri e operatori.

Se x e y stanno per due particolari classi, allora xy rappresenta la classe degli oggetti che stanno sia in x che in y.

Ma se y è la classe delle pecore, cosa sarà yy? Boole riprende l'assioma 2 di Leibniz $A \oplus A = A$, scrivendolo $yy = y$: "una pecora pecorosa è una pecora".

Nelle parole di Boole stesso

[...] If an adjective, as "good", is employed as a term of description, let us represent by a letter, as y*, all things to which the description "good" is applicable, i.e., "all good things," or the class "good things." Let it further be agreed, that by the combination* xy *shall be represented that class of things to which the names or descriptions represented by* x *and* y *are simultaneously applicable. Thus, if* x *alone stands for "white things," and* y *for "sheep", let* xy *stand for "white sheep;" and in like manner, if* z *stands for "horned things," [. . .] let* xyz *represent "horned white sheep." (in Davis 2000:28)*

Dalle classi ai numeri

Boole si pone allora la domanda: nell'algebra, dove x sta per un numero, quando l'equazione $xx = x$ è vera? La risposta è immediata:

- **l'equazione è vera per 0, 1 e nessun altro numero**.

Per avere senso, i simboli '0' e '1' devono essere reinterpretati come classi.

- 0 volte qualsiasi numero è 0
- 1 volta qualsiasi numero è quel numero

In simboli:

- $0x = 0$, $1x = x$.

L'algebra della logica secondo Boole

L'algebra permette le operazioni di addizione, sottrazione e moltiplicazione. Cosí Boole, con la regola speciale $xx = x$, deve dare una interpretazione per le operazioni:

- $x + y$ rappresenta la classe degli oggetti che si trovano o in x o in y (unione)
- $x - y$ rappresenta la classe degli x che *non* si trovano in y.

Per esempio, se x è la classe degli esseri umani e y è la classe dei bambini, allora $x - y$ viene a rappresentare la classe degli adulti.

Il principio di contraddizione aristotelico in Boole

Da quanto detto sopra, segue che, in generale, è vero:

- $x + (1 - x) = 1$

Se riscriviamo la regola speciale $xx = x$ come $x^2 = x$ allora è lo stesso dire $x(1 - x) = 0$. Detto in linguaggio naturale: *nulla può appartenere e non appartenere a una data classe x.*

Boole aveva espresso il principio di contraddizione aristotelico in termini algebrici.

L'eccitazione di Boole (in Davis 2000:11)

> *[this equation expresses precisely] that "principle of contradiction" which Aristotle has described as the fundamental axiom of all philosophy. "It is impossible that the same quality should both belong and not belong to the same thing [...] This is the most certain of all principles [...] Wherefore they who demonstrate refer to this as an ultimate opinion. For it is by nature the source of all the other axioms.*

Fino a Boole compreso, Aristotele era ancora la pietra di paragone per qualsiasi sistema logico venisse proposto.

I sillogismi aristotelici secondo Boole

Tutti gli uomini sono mortali.	Tutti gli X sono Y.
Socrate è un uomo.	X è Z.
Socrate è mortale.	X è Z.

I sillogismi aristotelici secondo Boole

Tutti gli uomini sono mortali.	Tutti gli X sono Y.
Socrate è un uomo.	X è Z.
Socrate è mortale.	X è Z.

Tutti i cavalli sono mammiferi.	Tutti gli X sono Y.
Tutti i mammiferi sono vertebrati.	Tutti gli X sono Z.
Tutti i cavalli sono vertebrati.	Tutti gli X sono Z.

I sillogismi aristotelici secondo Boole

Tutti gli uomini sono mortali.	Tutti gli X sono Y.
Socrate è un uomo.	X è Z.
Socrate è mortale.	X è Z.

Tutti i cavalli sono mammiferi.	Tutti gli X sono Y.
Tutti i mammiferi sono vertebrati.	Tutti gli X sono Z.
Tutti i cavalli sono vertebrati.	Tutti gli X sono Z.

Boole dimostra facilmente la verità del *secondo* ragionamento.
La prima premessa equivale a $X(1 - Y) = 0$.

I sillogismi aristotelici secondo Boole

Tutti gli uomini sono mortali.	Tutti gli X sono Y.
Socrate è un uomo.	X è Z.
Socrate è mortale.	X è Z.

Tutti i cavalli sono mammiferi.	Tutti gli X sono Y.
Tutti i mammiferi sono vertebrati.	Tutti gli X sono Z.
Tutti i cavalli sono vertebrati.	Tutti gli X sono Z.

Boole dimostra facilmente la verità del *secondo* ragionamento.
La prima premessa equivale a $X(1 - Y) = 0$. Lo vedete?

Esempio di dimostrazione alla Boole

'Tutti gli X sono Y' equivale infatti a 'non c'è nessun X che non appartiene a Y', in formule: $X(1-Y)=0$ oppure egualmente $X=XY$.

La seconda premessa è analoga: $Y=YZ$. Usando le seguenti equazioni Boole dimostra la verità del secondo ragionamento:

$X=XY=X(YZ)=(XY)Z=XZ.$

Esempio di dimostrazione alla Boole

‘Tutti gli X sono Y’ equivale infatti a ‘non c’è nessun X che non appartiene a Y’, in formule: $X(1 - Y) = 0$ oppure egualmente $X = XY$.

La seconda premessa è analoga: $Y = YZ$. Usando le seguenti equazioni Boole dimostra la verità del secondo ragionamento:

$X = XY = X(YZ) = (XY)Z = XZ$.

$\mathcal{Q}.\mathcal{E}.\mathcal{D}.$

Esempio di dimostrazione alla Boole

'Tutti gli X sono Y' equivale infatti a 'non c'è nessun X che non appartiene a Y', in formule: $X(1-Y)=0$ oppure egualmente $X=XY$.

La seconda premessa è analoga: $Y=YZ$. Usando le seguenti equazioni Boole dimostra la verità del secondo ragionamento:

$$X = XY = X(YZ) = (XY)Z = XZ.$$

$\mathcal{Q}.\mathcal{E}.\mathcal{D}.$

Ma Boole applica il suo metodo a proposizioni non solo monadiche e indipendenti come i sillogismi ma anche a *proposizioni secondarie*, che rappresentano relazioni tra proposizioni.

Esempio di conversazione (Davis 2000:35–36)

PREMESSA. Conversazione tra Joe e Susan. Joe non trova la sua carta di credito e Susan lo sta aiutando.

SUSAN. L'hai lasciata al super dove abbiamo fatto la spesa?

JOE. No, ho già chiamato. L'avrebbero trovata di sicuro.

SUSAN. Aspetta. L'hai usata ieri sera al ristorante e ti ho visto rimetterla nella giacca. Se non l'hai usata da allora, deve essere ancora lí.

JOE (*controlla*) Hai ragione, non l'ho piú usata... Eccola!

Esempio di conversazione (Davis 2000:35–36)

PREMESSA. Conversazione tra Joe e Susan. Joe non trova la sua carta di credito e Susan lo sta aiutando.

SUSAN. L'hai lasciata al super dove abbiamo fatto la spesa?

JOE. No, ho già chiamato. L'avrebbero trovata di sicuro.

SUSAN. Aspetta. L'hai usata ieri sera al ristorante e ti ho visto rimetterla nella giacca. Se non l'hai usata da allora, deve essere ancora lí.

JOE (*controlla*) Hai ragione, non l'ho piú usata... Eccola!

Proviamo a formalizzare insieme gli eventi della conversazione.

Formalizzazione degli eventi (Davis 2000:36)

L = Joe ha *lasciato* la carta al super.

S = Hanno trovato la carta al *super*.

U = Joe ha *usato* la carta al ristorante.

G = Joe ha messo la carta nella *giacca*.

N = Joe *non* ha usato la carta dalla sera prima.

A = La carta di Joe è *ancora* nella giacca.

Riscrittura della conversazione (Davis 2000:36)

PREMESSE.
Se L, allora S.

Riscrittura della conversazione (Davis 2000:36)

PREMESSE.
Se L, allora S.

Non S.

Riscrittura della conversazione (Davis 2000:36)

PREMESSE.
Se L, allora S.

Non S.

U & G.

Riscrittura della conversazione (Davis 2000:36)

PREMESSE.
Se L, allora S.

Non S.

U & G.

Se U & G & N, allora A.

Riscrittura della conversazione (Davis 2000:36)

PREMESSE.
Se L, allora S.

Non S.

U & G.

Se U & G & N, allora A.

N.

Riscrittura della conversazione (Davis 2000:36)

PREMESSE.
Se L, allora S.

Non S.

U & G.

Se U & G & N, allora A.

N.

CONCLUSIONI.
Non S.

Riscrittura della conversazione (Davis 2000:36)

PREMESSE.
Se L, allora S.

Non S.

U & G.

Se U & G & N, allora A.

N.

CONCLUSIONI.
Non S.

A.

Regole di formalizzazione (Davis 2000:37)

Boole asserisce che:

- a) $X = 1$ equivale a 'la proposizione X è vera'.
- b) $Y = 0$ equivale a 'la proposizione Y è falsa'.
- c) 'Non X' equivale a '$X = 0$'.
- d) 'X & Y' equivale a $XY = 1$.
- e) 'Se X, allora Y' equivale a $X(1 - Y) = 0$.

Regole di formalizzazione (Davis 2000:37)

Boole asserisce che:

- a) $X = 1$ equivale a 'la proposizione X è vera'.
- b) $Y = 0$ equivale a 'la proposizione Y è falsa'.
- c) 'Non X' equivale a '$X = 0$'.
- d) 'X & Y' equivale a $XY = 1$.
- e) 'Se X, allora Y' equivale a $X(1 - Y) = 0$.

DIMOSTRAZIONE DI (D). $XY = 1$ se $X = Y = 1$, ma $XY = 0$ se almeno $X = 0$ o $Y = 0$. $\mathcal{Q}.\mathcal{E}.\mathcal{D}$.

Regole di formalizzazione (Davis 2000:37)

Boole asserisce che:

- a) $X = 1$ equivale a 'la proposizione X è vera'.
- b) $Y = 0$ equivale a 'la proposizione Y è falsa'.
- c) 'Non X' equivale a '$X = 0$'.
- d) 'X & Y' equivale a $XY = 1$.
- e) 'Se X, allora Y' equivale a $X(1 - Y) = 0$.

DIMOSTRAZIONE DI (D). $XY = 1$ se $X = Y = 1$, ma $XY = 0$ se almeno $X = 0$ o $Y = 0$. $\mathcal{Q.E.D}$.

DIMOSTRAZIONE DI (E). 'Se $X = 1$, allora $Y = 1$', sostituisco $X = 1$ in $1 - Y = 0$ e dunque $Y = 1$. $\mathcal{Q.E.D}$.

Formalizzazione della conversazione (Davis 2000:36)

PREMESSE.

Se L, allora S.	$\rightarrow$	$L(1-S)=0.$
Non S.	$\rightarrow$	$S=0.$
U & G.	$\rightarrow$	$UG=1.$
Se U & G & N, allora A.	$\rightarrow$	$UGN(1-A)=0.$
N.	$\rightarrow$	$N=1.$

Formalizzazione della conversazione (Davis 2000:36)

PREMESSE.

Se L, allora S.	$\rightarrow$	$L(1-S)=0.$
Non S.	$\rightarrow$	$S=0.$
U & G.	$\rightarrow$	$UG=1.$
Se U & G & N, allora A.	$\rightarrow$	$UGN(1-A)=0.$
N.	$\rightarrow$	$N=1.$

CONCLUSIONI.

Non S.	$\rightarrow$	$S=0.$
A.	$\rightarrow$	$A=1.$

Boole e il sogno di Leibniz (Davis 2000:39–40)

Gli scritti di Leibniz erano eterogenei: lettere, frammenti spesso non pubblicati: Boole *non* aveva conoscenza diretta dell'opera di Leibniz, ma indiretta, attraverso la prova dell'esistenza di Dio di Clarke, da lui formalizzata – Hamilton ne rimase orripilato.

Boole e il sogno di Leibniz (Davis 2000:39–40)

Gli scritti di Leibniz erano eterogenei: lettere, frammenti spesso non pubblicati: Boole *non* aveva conoscenza diretta dell'opera di Leibniz, ma indiretta, attraverso la prova dell'esistenza di Dio di Clarke, da lui formalizzata – Hamilton ne rimase orripilato.

Il limite della *characteristica universalis* di Leibniz cosí come della logica booleana stanno nel seguente assioma, che una cosa applicata a se stessa è la stessa cosa:

- $A \oplus A = A$ (Leibniz)
- $xx = x$ (Boole)

Limiti della logica booleana (Davis 2000:40)

Consideriamo la seguente proposizione:

'Tutti i professori incapaci sono ignoranti o stupidi.'

Nei termini di Boole:

'Tutti gli X sono Y.'

Questo però non ci permette di distinguere, nella classe dei professori incapaci, quelli ignoranti da quelli stupidi. Vedremo che sarà Gottlob Frege a compiere il prossimo passo.

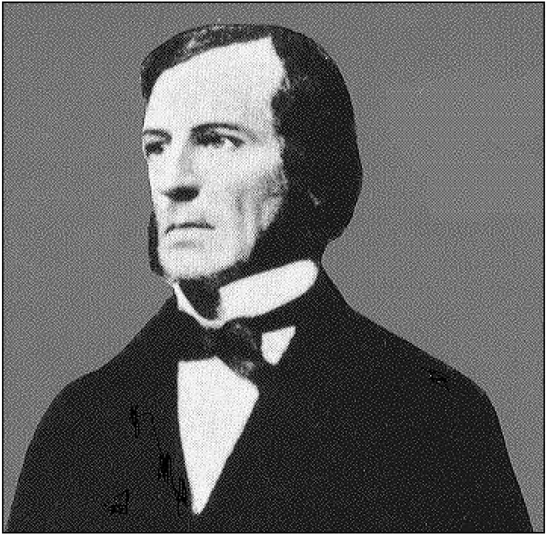

Figura: George Boole

Figura: Charles Babbage

Charles Babbage

Charles Babbage (1791–1871), professore di matematica a Cambridge (la cattedra di Newton) e membro della *Royal Society*, è considerato il primo informatico della storia.

Si occupa di **crittografia**: realizza un metodo per la decrittazione delle cifrature effettuate con il cifrario di Vigenère (1854), pubblicato postumo, e inventa il "pilota", la struttura metallica attaccata sulla parte anteriore delle locomotive che spazza gli ostacoli dalla ferrovia.

È l'ideatore della **tariffa postale unica**: allora il mittente pagava una tariffa variabile in base alla distanza dal destinatario, il che comportava molti calcoli complessi, e non permetteva allo stato di guadagnare sulle tratte brevi.

Il programma delle macchine da calcolo di Babbage

Charles Babbage riprende il programma delle macchine da calcolo automatico del Seicento apportando le conoscenze del suo tempo.

Costruisce una nuova macchina da calcolo nel 1822, chiamata **macchina differenziale**, (*Difference Engine*), che crea tabelle di polinomi che approssimano ragionevolmente logaritmi e funzioni di trigonometria. Ottiene i finanziamenti per realizzarla.

Fortuna della macchina differenziale

La costruzione di questa macchina non viene portata a termine per due motivi. Il primo è *tecnologico*: le ruote dentate facevano troppo attrito e facevano vibrare la macchina. Il secondo problema era l'*aleatorietà dei progetti*: Babbage cambia idea in continuazione, facendo esasperare i meccanici assunti per la costruzione.

Con le ruote dentate moderne, si è riusciti a costruire delle macchine differenziali perfettamente funzionanti.

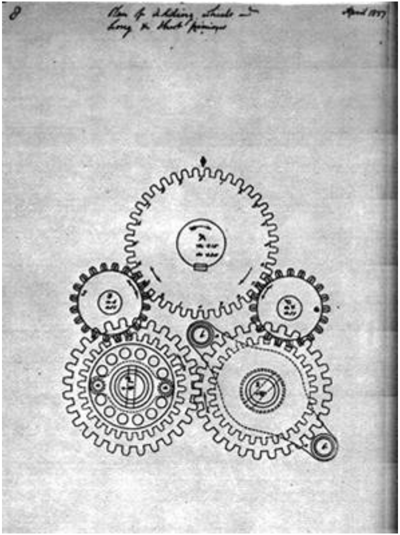

Figura: Ruote dentate (disegno di Babbage)

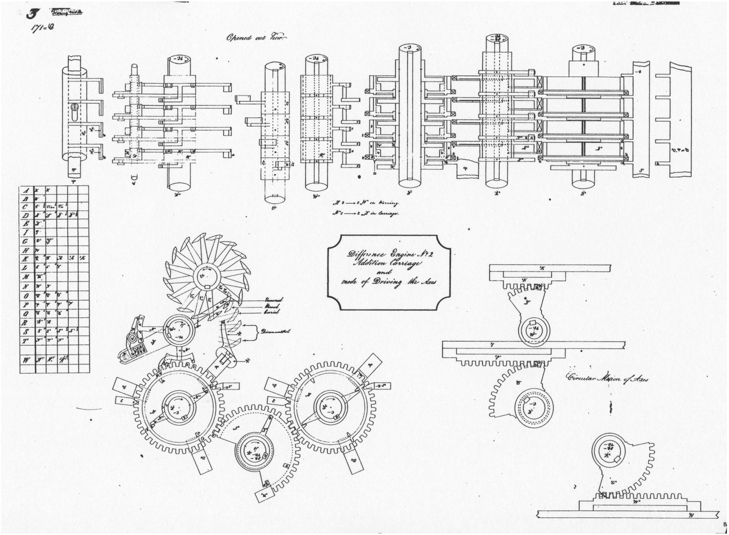

Figura: Foglio dai progetto di Babbage (versione completa qui: `http://ed-thelen.org/bab/bab-intro.html`)

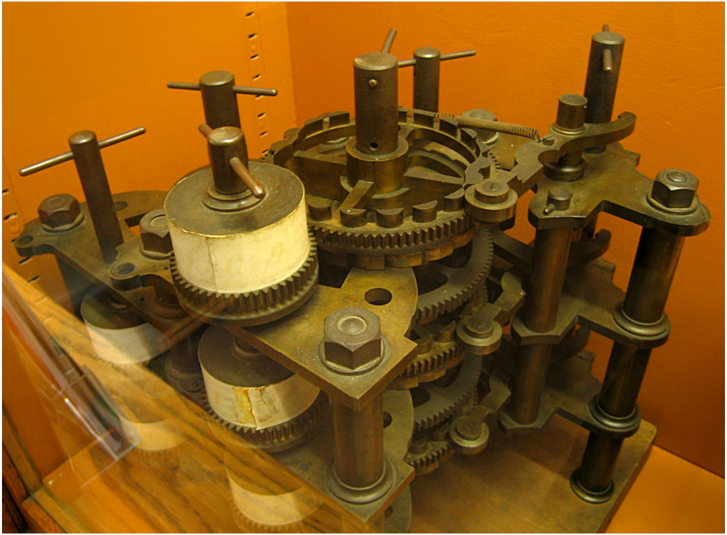

Figura: Costruzione parziale della *Difference engine* da parte del figlio

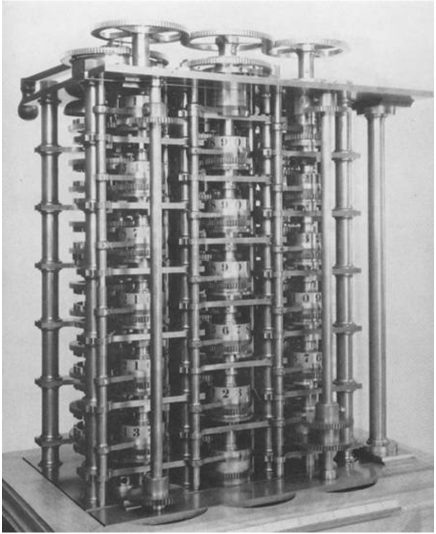

Figura: La *Difference engine* come doveva essere

La prima macchina differenziale funzionante

Pehr Georg Scheuz (1785-1873), avvocato, traduttore e inventore svedese, riesce a costruire la prima macchina di Babbage nel 1853. La brevetta a Londra nel 1855, poi la vende negli Stati Uniti, all' *American Association for the Advancement of Science*, in occasione della costruzione dell'Osservatorio Astronomico di Albany, capitale dello stato di New York (1858):

> *Nell'acquisizione della macchina da calcolo vedo l'inaugurazione di una nuova era [...] Questa macchina è come la nave a vapore per la navigazione; è la locomotiva per chi fa calcoli (Scheuz in Losano 1974:56).*

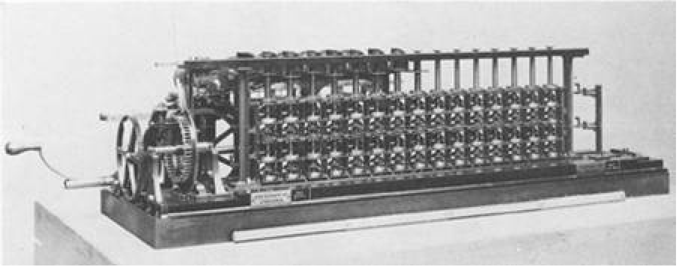

Figura: Macchina delle differenze di Scheutz (1853)

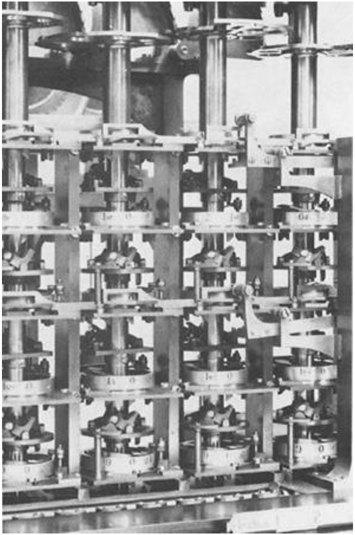

Figura: Dettaglio delle ruote nella macchina di Scheutz (1853)

Figura: Pehr Georg Scheuz

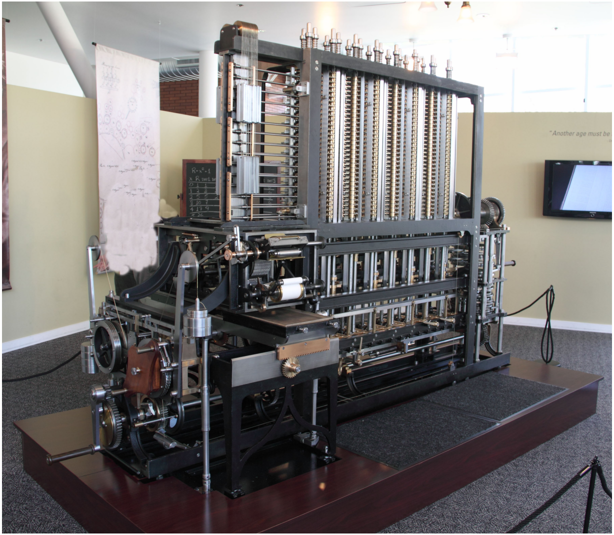

Figura: Modello funzionante moderno della *Difference Engine* secondo i progetti originali di Babbage (Mountain View Museum, CA)

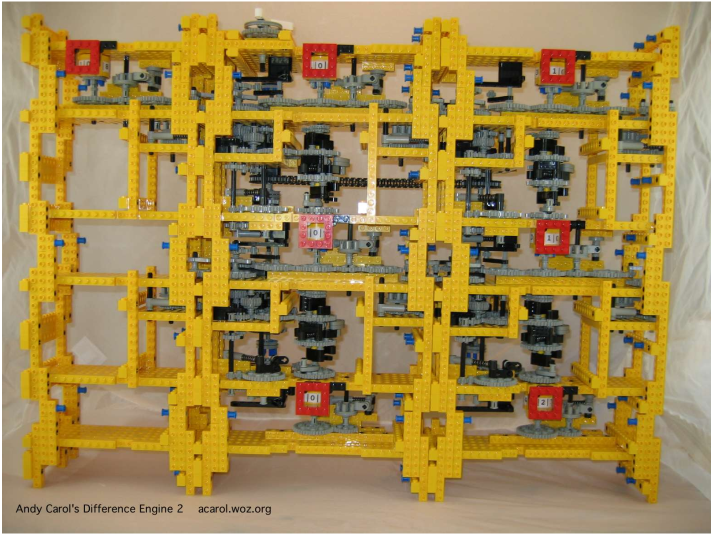

Figura: Un modello funzionante della *Difference Engine* secondo i progetti originali di Babbage in Lego (by Andrew Carol)

Charles Babbage e le effemeridi

Babbage non si dà per vinto ma rilancia: tra il 1833 e il 1842 progetta la sua nuova macchina da calcolo, che doveva superare di gran lunga tutte le macchine fatte fino a quel momento.

Egli parte dalle tavole delle **effemeridi** (dal greco *ephemeros*, giornaliero) che mostrano i valori – in un certo lasso di tempo – di diverse grandezze astronomiche, tra cui: magnitudine, parametri orbitali, coordinate di pianeti. Le effemeridi servono per sapere in anticipo le posizioni degli astri e quindi compiere corrette osservazioni astronomiche. Oltre al valore scientifico, le effemeridi hanno anche un valore pratico, per il calcolo delle rotte, che nell'Ottocento diventano importantissime, con la globalizzazione del commercio.

Le effemeridi e la Macchina Analitica

Le effemeridi sono dunque un *bisogno sociale* a sostegno dell' innovazione tecnologica. I libri delle effemeridi erano pieni di errori tipografici, perché non c'è il riscontro del significato ad aiutare i correttori di bozze. A volte le correzioni producono nuovi errori.

Pertanto Babbage pensa a una macchina che non solo calcoli le effemeridi in modo automatico, ma che le stampi. Introduce il primo **dispositivo di output**.

Per capire il funzionamento delle macchine di Babbage, dobbiamo introdurre il telaio Jacquard, la tecnologia scelta da Babbage per la sua nuove opera: ammirava a tal punto Jacquard, da avere un suo ritratto nello studio, tessuto proprio con il telaio (Davis 2000:178).

Il telaio Jacquard

La rivoluzione industriale nasce nel Settecento in Inghilterra nel campo tessile con una nuova tecnologia del telaio: l'operaio lavora in *filiera*, dove si fanno i tessuti (con i fili).

Joseph-Marie Jacquard (1752–1834), operaio tessile francese insignito da Napoleone di una pensione onoraria per il suo brevetto, ha l'idea di costruire un telaio *automatico*, in cui inserire un nastro di cartoni a soffietto con perforazioni che *codificavano* l'informazione del tessuto: **una sorta di "programma" del vestito, scritto in codice binario**: buco sí, buco no.

Fortuna del telaio Jacquard

Nonostante trovi l'opposizione degli operai, si diffonde rapidamente. Si noti che i tessuti Jacquard sono sinonimo di tessuti di prestigio, perché i risultati possono essere molto raffinati.

Potete ammirare il telaio Jacquard a Busto Arsizio o a Milano (Museo della Scienza e della Tecnologia).

Per capire l'importanza dell'automazione nella tessitura, considerate che ancora oggi in Cina (2006) ci sono due persone che lavorano a mano il broccato, una che controlla i cartoni, l'altra che controlla la disposizione dei fili. Ci vogliono anni di apprendistato per poter fare questo lavoro, che produce 6 cm di broccato al giorno (comunicazione personale del prof. Lanzarone).

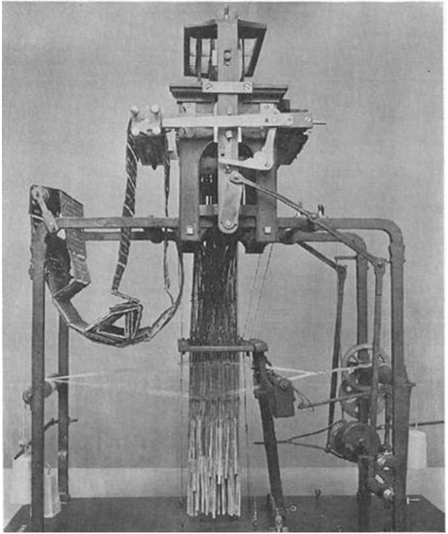

Figura: Un telaio Jacquard

Figura: Joseph Marie Jacquard

Figura: Operai cinesi al telaio del broccato (2006; foto: G. A. Lanzarone)

La pianola a cartoni perforati

Avrete sicuramente visto nei western o nei fumetti di Lucky Luke le pianole meccaniche: la pianola non calcola nulla, ma suona le melodie secondo un **nastro perforato**, simile a quello del telaio Jacquard – il principio è quello dei *carillon*. Cambiando il nastro si cambiava la melodia. Le pianole erano molto diffuse nell'Ottocento.

Babbage combina il *medium* Jacquard (i cartoni perforati) per l'input e l'*esigenza sociale* di avere delle effemeridi corrette per l'output. In mezzo pone un'**unità centrale**, la quale ha dei **dispositivi di memoria** per i calcoli intermedi. Non siamo molto distanti dall'architettura di Von Neumann.

Figura: Pianola a cartoni perforati. Bologna, 1900 circa

Forse chi conosce i principi su cui si fonda il telaio Jacquard e ha una certa familiarità con le formule analitiche, non avrà molta difficoltà a formarsi un'idea generale dei mezzi con i quali la macchina esegue le operazioni [...] È risaputo, infatti, che il telaio Jacquard può tessere qualsiasi disegno che l'immaginazione umana è capace di concepire. È pure noto che è pratica costante dei fabbricanti rivolgersi ad artisti provetti per disegnare i modelli. Questi modelli sono poi affidati a un artigiano specializzato, il quale, per mezzo di una certa macchina, punzona una serie di cartoni. Dopo averli inseriti nel telaio Jacquard, esso tesserà il disegno come lo ha tratteggiato l'artista [...] L'analogia tra la macchina analitica e questo ben noto procedimento è quasi perfetta. (Babbage1864, citato in Losano 1973:110-111).

Ada Lovelace

Augusta Ada Byron (1815–1852), figlia del poeta Lord Byron e della matematica Annabella Milbanke, nota come Ada Lovelace, a seguito del matrimonio con William King, conte di Lovelace. A 17 anni (1833) incontra Charles Babbage, rimane affascinata dalla macchina differenziale e decide di diventare la sua collaboratrice – Babbage la chiama 'l'incantatrice dei numeri'.

Figura: Ada Lovelace

Luigi Menabrea

Babbage parla del progetto della Macchina Analitica al Secondo Congresso degli Scienziati Italiani a Torino nel 1840. Per la prima volta si discute su come concatenare le operazioni nella Macchina Analitica – in un certo senso, si discute di programmazione.

Un matematico italiano, Luigi Federico Menabrea (1809–1896), generale e uomo politico (è stato Presidente del Consiglio del Regno d'Italia), scrive un sommario e nel 1842 pubblica presso la *Bibliothèque Universelle de Genève* una memoria in francese: *Notions sur la machine analytique de Charles Babbage*. Quest'articolo è il primo paper scientifico di informatica della storia.

Ada traduce l'articolo di Manabrea in inglese e lo mostra a Babbage, che le suggerisce di aggiungere delle note sue.

Figura: Luigi Federico Menabrea (attorno al 1860)

Le note di Ada Lovelace

Le note risultano piú lunghe del testo di Manabrea, e vengono pubblicate nel 1843: Lady Lovelace non solo descrive la macchina di Babbage, ma la vede come ciò che oggi chiamiamo *general-purpose computing*, in codice binario:

> *developping [sic] and tabulating any function whatever [...] the engine [is] the material expression of any indefinite function of any degree of generality and complexity.*

Il suo articolo include un piano, per calcolare i numeri di Bernoulli, il primo programma della storia. Nelle note anticipa gli sviluppi futuri, compresi musica e grafica generate dal computer, e predice l'uso della macchina come macchina multiscopo e di uso sia pratico che scientifico.

La Macchina Analitica come calcolatore...

La caratteristica distintiva della Macchina Analitica è l'introduzione in essa del principio che Jacquard individuò per regolare, mediante schede perforate, le forme piú complicate nella fabbricazione di stoffe di broccato [...] Possiamo dire che la Macchina Analitica tesse motivi algebrici proprio come il telaio di Jacquard tesse fiori e foglie (dalle Note del 1844).

...e come calcolatore universale!

Molte persone non avvezze agli studi matematici immaginano che poiché il compito della Macchina Analitica è di dare risultati in notazione numerica, la natura dei suoi processi deve necessariamente essere aritmetica e numerica piuttosto che algebrica e analitica. Questo è un errore. La macchina può disporre e combinare le sue quantità numeriche esattamente come se fossero lettere o qualunque altro tipo di simboli generali (citato in Knuth 1973a).

Ada Lovelace e Alan Turing

In onore della Lovelace viene dato il nome ADA al linguaggio di programmazione sviluppato nel 1979 dal Dipartimento della Difesa degli Stati Uniti, una evoluzione del Pascal.

La Lovelace anticipa quello che Alan Turing dirà nel 1947: il computer è una **macchina universale**: non fa una cosa sola, fa qualunque cosa possa essere rappresentata in maniera simbolica.

Turing riprende la Lovelace nella Sesta Obiezione al gioco dell'imitazione, perché lei sostiene che ≪la macchina analitica non ha la pretesa di creare alcunché. Può fare qualsiasi cosa sappiamo come ordinarle di fare≫.

Alan Turing, *Intelligent Machinery*, 1947

L'importanza della macchina universale è chiara. Non abbiamo bisogno di un'infinità di macchine che fanno diversi lavori. Una sola basterà. Il problema ingegneristico di produrre varie macchine per vari compiti è sostituito dal lavoro intellettuale di programmare la macchina universale a svolgere questi compiti.

Babbage "patrono" dei *geek*

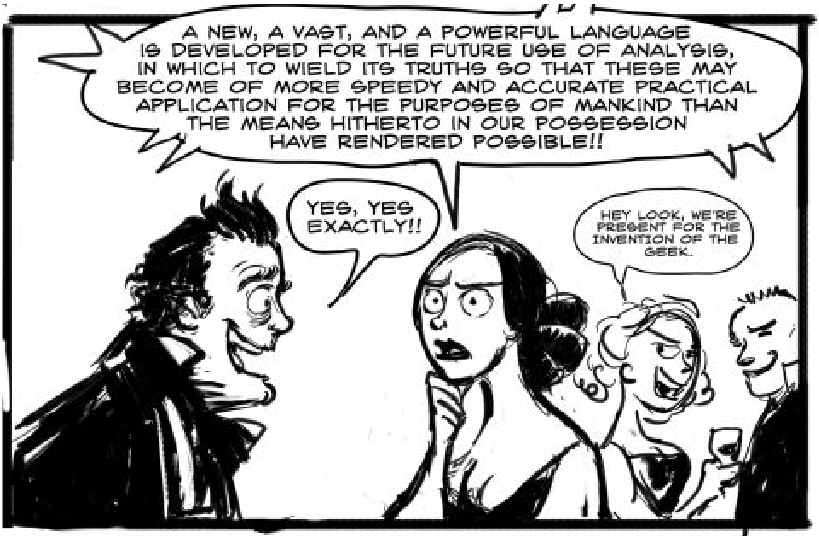

Figura: Fumetto su Babbage & Ada Lovelace (by Sydney Padua)

Babbage e la fantascienza

Figura: Copertina dell'edizione italiana del romanzo ucronico di fantascienza steampunk *The difference engine* di William Gibson e Bruce Sterling, dove si ipotizza che Babbage a la Lovelace riescono a costruire e diffondere capillarmente i computer nel loro tempo.

Detour: il turco giocatore di scacchi

Si tratta di un automa a grandezza naturale, con le sembianze di un turco, che il barone transilvano Wolfgang von Kempelen presenta nel 1769 alla corte viennese di Maria Teresa d'Austria.

L'automa è in grado di giocare a scacchi con un essere umano. È seduto ad una scrivania – lunga 100 cm., alta 85 e profonda 60 – sulla quale poggia una scacchiera. Dando la carica con una chiavetta, il turco può giocare con un avversario umano una partita a scacchi che poteva durare anche piú di mezz'ora – con ricariche intermedie ogni 10 o 12 mosse: un gran cigolio di ruote dentate accompagnava il suo movimento.

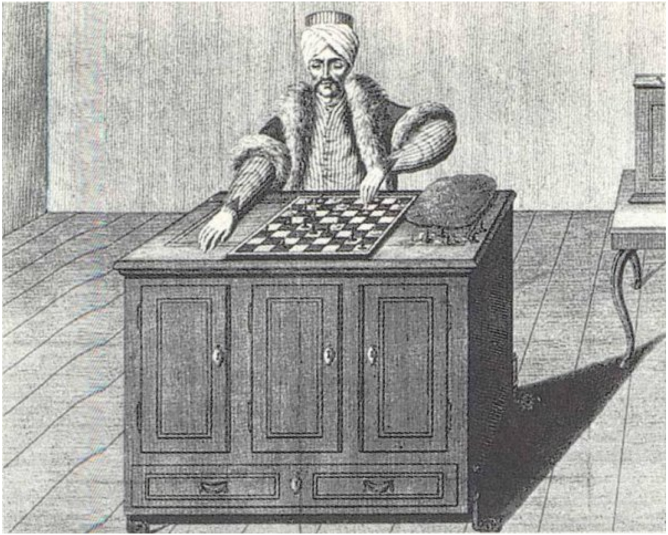

Figura: L'automa giocatore di scacchi (1789)

Fortuna dell'automa turco giocatore di scacchi

Grande fortuna ebbe questo automa, che destò l'interesse nelle corti reali. L'automa viene mostrato tra il 1783 e il 1785 a Londra, Parigi e nelle principali città tedesche.

Morto von Kempelen, nel 1804 l'automa viene acquistato dall'inventore viennese Johann Nepomuk Mälzel e viaggia in Germania, Olanda e Francia.

Nel 1809 a Vienna anche Napoleone I lo vuole provare. Insospettito, faceva volutamente delle mosse non legittime secondo le regole degli scacchi. Le prime due volte l'automa rimette a posto il pezzo spostato scorrettamente ma la terza volta rovescia la scacchiera, lo scatolone che stava sotto la scacchiera si apre, e. . .

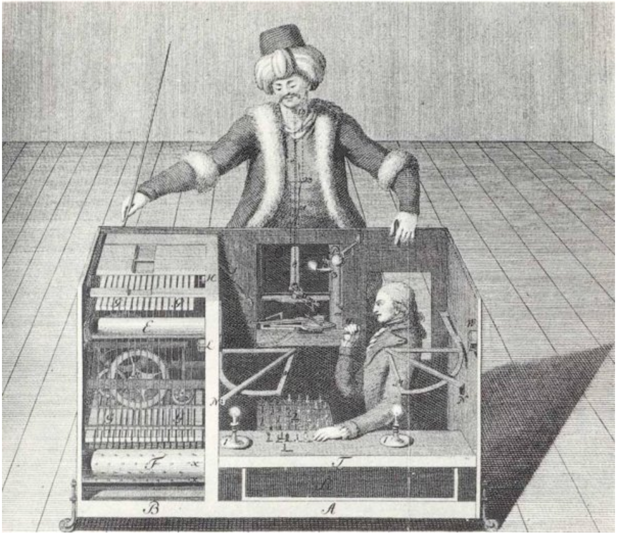

Figura: Il trucco dell'automa che gioca a scacchi

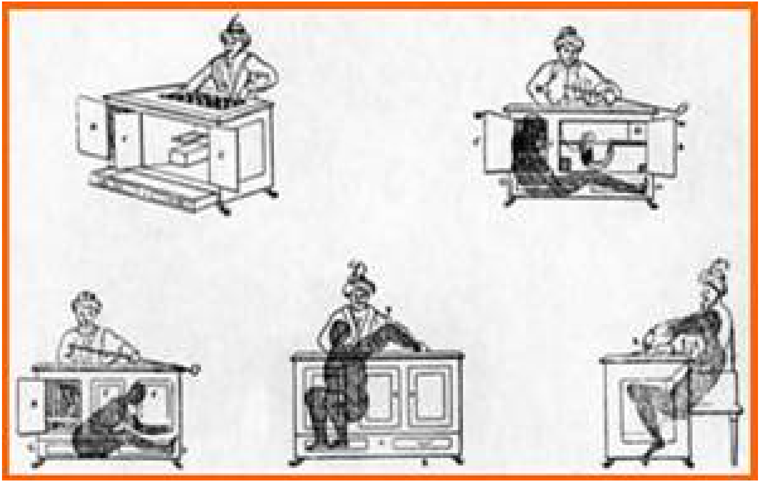

Figura: Funzionamento dell'automa che gioca a scacchi

La fortuna americana dell'automa scacchista

Furioso con Napoleone, era uscito il migliore scacchista viennese del tempo (che era nano). L'automa lascia l'Europa e riprende il suo trucco negli Stati Uniti d'America, dove non era ancora noto.

A Richmond tra gli spettatori si trova Edgard Allan Poe, che spiega l'artificio nel saggio *Maelzel's Chess Player* (1836; v. Poe 1985), dove cita la macchina analitica di Babbage. Alla morte di Mälzel, l'automa scacchista finisce in un museo di Filadelfia, dove viene distrutto da un incendio nel 1854.

La fortuna americana dell'automa scacchista

Furioso con Napoleone, era uscito il migliore scacchista viennese del tempo (che era nano). L'automa lascia l'Europa e riprende il suo trucco negli Stati Uniti d'America, dove non era ancora noto.

A Richmond tra gli spettatori si trova Edgard Allan Poe, che spiega l'artificio nel saggio *Maelzel's Chess Player* (1836; v. Poe 1985), dove cita la macchina analitica di Babbage. Alla morte di Mälzel, l'automa scacchista finisce in un museo di Filadelfia, dove viene distrutto da un incendio nel 1854.

Perché è importante questa storia?

Friedrich Ludwig Gottlob Frege

Gottlob Frege nasce a Wismar (Germania) nel 1848. Nel 1873 la Germania viene unita grazie alla vittoria di Bismark su Napoleone III, che Frege considera un eroe.

Nella crisi della Germania a seguito della sconfitta nella prima guerra mondiale, Frege si dichiara apertamente antisemita, ostile alla democrazia, e auspica l'arrivo di un nuovo *Kaiser* per fermare i socialisti, i cattolici, e rilanciare la Grande Germania. Muore nel 1925, prima della deriva hitleriana.

La concezione della logica di Frege

Frege nel 1879 pubblica un fascicolo di meno di cento pagine intitolato *Begriffsschrift*, in cui codifica in modo completo e rigoroso il linguaggio della logica del primo ordine, superando i limiti della logica booleana, che ne è un sottoinsieme.

Frege propugna il **programma logicista**, ovvero il tentativo di ridurre la matematica, costituita da proposizioni analitiche, alla logica. Nel *Grundgesetze der Arithmetik*, le leggi basilari dell'aritmetica, (prima edizione: 1893) tenta di derivare esplicitamente le leggi dell'aritmetica da un sistema di assiomi mediante un calcolo logico.

BEGRIFFSSCHRIFT,

EINE DER ARITHMETISCHEN NACHGEBILDETE

FORMELSPRACHE

DES REINEN DENKENS.

VON

D^R. GOTTLOB FREGE,

PRIVATDOCENTEN DER MATHEMATIK AN DER UNIVERSITÄT JENA.

HALLE ᴬ/S.

VERLAG VON LOUIS NEBERT.

1879.

Figura: Copertina di *Begriffsschrift* (1879)

L'ideografia

Begriffsschrift è composto da *Begriff* (concetto) e *Schrift* (modalità di scrittura). Sottotitolo: «un linguaggio di formule, modellato sopra l'aritmetica, di pensiero puro. ».

Gli esempi che seguono (da Davis 2000, cap. 3) utilizzano la notazione moderna, introdotta piú tardi da Peano con il *Formulario Mathematico*. Prendiamo due predicati:

L'ideografia

Begriffsschrift è composto da *Begriff* (concetto) e *Schrift* (modalità di scrittura). Sottotitolo: ≪un linguaggio di formule, modellato sopra l'aritmetica, di pensiero puro. ≫.

Gli esempi che seguono (da Davis 2000, cap. 3) utilizzano la notazione moderna, introdotta piú tardi da Peano con il *Formulario Mathematico*. Prendiamo due predicati:

- Tutti i cavalli sono mammiferi.
- Alcuni cavalli sono purosangue.

Il salto dell'ideografia di Frege...

Frege parte da Boole:

$$\text{Tutti i cavalli sono mammiferi.}$$
$$\downarrow$$
$$\text{Se } x \text{ è un cavallo, allora } x \text{ è un mammifero.}$$

Il salto dell'ideografia di Frege...

Frege parte da Boole:

Tutti i cavalli sono mammiferi.

$\downarrow$

Se x è un cavallo, allora x è un mammifero.

La seconda proposizione ha il connettivo *and*:

Il salto dell'ideografia di Frege...

Frege parte da Boole:

Tutti i cavalli sono mammiferi.

$\downarrow$

Se x è un cavallo, allora x è un mammifero.

La seconda proposizione ha il connettivo *and*:

Alcuni cavalli sono purosangue.

$\downarrow$

x è un cavallo *and* x è purosangue.

Il salto dell'ideografia di Frege...

Frege parte da Boole:

Tutti i cavalli sono mammiferi.

$\downarrow$

Se x è un cavallo, allora x è un mammifero.

La seconda proposizione ha il connettivo *and*:

Alcuni cavalli sono purosangue.

$\downarrow$

x è un cavallo *and* x è purosangue.

N.B.: le due x del secondo esempio sono diverse.

Il salto dell'ideografia di Frege. . .

Frege parte da Boole:

Tutti i cavalli sono mammiferi.

$\downarrow$

Se x è un cavallo, allora x è un mammifero.

La seconda proposizione ha il connettivo *and*:

Alcuni cavalli sono purosangue.

$\downarrow$

x è un cavallo *and* x è purosangue.

N.B.: le due x del secondo esempio sono diverse. Perché?

. . . sta nei quantificatori (∀,∃)

Prima proposizione:

Tutti i cavalli sono mammiferi.

$\downarrow$

Se x è un cavallo, allora x è un mammifero.

$\downarrow$

$(\forall x)$(*if* x è un cavallo *then* x è un mammifero).

...sta nei quantificatori ($\forall$,$\exists$)

Prima proposizione:

Tutti i cavalli sono mammiferi.

$\downarrow$

Se x è un cavallo, allora x è un mammifero.

$\downarrow$

$(\forall x)$(*if* x è un cavallo *then* x è un mammifero).

Seconda proposizione:

Alcuni cavalli sono purosangue.

$\downarrow$

x è un cavallo *and* x è purosangue.

$\downarrow$

$(\exists x)$(x è un cavallo *and* x è purosangue).

Frege supera Boole (Davis 2000:51)

Riprendiamo la proposizione:

'Tutti i professori incapaci sono ignoranti o stupidi.'

Nei termini di Frege:

$I(x)$ per *x è un professore Incapace.*

$G(x)$ per *è iGnorante.*

$S(x)$ per *è Stupido.*

Frege supera Boole (Davis 2000:51)

Riprendiamo la proposizione:

'Tutti i professori incapaci sono ignoranti o stupidi.'

Nei termini di Frege:

$I(x)$ per *x è un professore Incapace.*

$G(x)$ per *è iGnorante.*

$S(x)$ per *è Stupido.*

La frase può essere espressa come:
$(\forall x)(I(x) \subset G(x) \vee S(x))$.

Un po' di notazione

$\forall$ ricorda la {A} della parola *All*, mentre $\exists$ ricorda la {E} di *Exists*.

Introduciamo altri simboli (Davis 2000:51):

$\neg$	not ...
$\vee$	... or ...
$\wedge$	... and ...
$\subset$	if ..., then ...
$\forall$	every
$\exists$	some

Riprendiamo gli eventi di prima. . . (Davis 2000:36)

L = Joe ha *lasciato* la carta al super.

S = Hanno trovato la carta al *super*.

U = Joe ha *usato* la carta al ristorante.

G = Joe ha messo la carta nella *giacca*.

N = Joe *non* ha usato la carta dalla sera prima.

A = La carta di Joe è *ancora* nella giacca.

... partendo da Boole... (Davis 2000:36)

$$\begin{array}{l} L(1-S)=0. \\ S=0. \\ UG=1. \\ UGN(1-A)=0. \\ N=1. \\ \hline S=0. \\ A=1. \end{array}$$

. . . arriviamo a Frege (Davis 2000:51)

$$
\begin{array}{l}
L \subset S. \\
\neg S. \\
U \wedge G. \\
U \wedge G \wedge N \subset A. \\
N. \\
\hline
\neg L. \\
A.
\end{array}
$$

Espressività della logica fregiana (Davis 2000:52)

Ma con i quantificatori possiamo fare di piú. Come si scriverà:

- Everyone loves someone
- Someone loves everyone

?

Espressività della logica fregiana (Davis 2000:52)

Ma con i quantificatori possiamo fare di piú. Come si scriverà:

- Everyone loves someone
- Someone loves everyone

?

Everyone loves someone	$(\forall x)(\exists y)L(x,y)$
Someone loves everyone	$(\forall x)(\exists y)L(x,y)$
Everyone is loved by someone	$(\forall y)(\exists x)L(x,y)$
Someone is loved by everyone	$(\exists y)(\forall x)L(x,y)$

E al limite. . . (Davis 2000:52)

$$\text{Everyone loves a lover.}$$
$$\downarrow$$
$$(\forall x)(\forall y)[y \text{ is a lover} \subset L(x, y)].$$
$$\downarrow$$
$$(\forall x)(\forall y)[(\exists z)L(y, z) \subset L(x, y)].$$

E al limite. . . (Davis 2000:52)

$$\text{Everyone loves a lover.}$$
$$\downarrow$$
$$(\forall x)(\forall y)[y \text{ is a lover} \subset L(x, y)].$$
$$\downarrow$$
$$(\forall x)(\forall y)[(\exists z)L(y, z) \subset L(x, y)].$$

Nota: le grammatiche di formalizzazione delle lingue storico-naturali del logico americano Richard Montague discendono da questa idea.

Detour: Frege filosofo del linguaggio

Nel 1892 Frege pubblica un paper su un giornale filosofico dal titolo *Über Sinn und Bedeutung*, sul senso e la denotazione. Frege nota che parole diverse possono essere usate per nominare o denotare lo stesso oggetto specifico.

L'esempio di Frege è notissimo: si tratta del pianeta Venere, che è sia *la stella della mattina* che *la stella della sera* (per secoli si credette fossero due stelle diverse molto vicine alla Terra, e non Venere). Le due frasi **denotano** lo stesso referente esterno (Venere), ma il loro **senso** è molto differente.

Detour: Frege filosofo del linguaggio

Nel 1892 Frege pubblica un paper su un giornale filosofico dal titolo *Über Sinn und Bedeutung*, sul senso e la denotazione. Frege nota che parole diverse possono essere usate per nominare o denotare lo stesso oggetto specifico.

L'esempio di Frege è notissimo: si tratta del pianeta Venere, che è sia *la stella della mattina* che *la stella della sera* (per secoli si credette fossero due stelle diverse molto vicine alla Terra, e non Venere). Le due frasi **denotano** lo stesso referente esterno (Venere), ma il loro **senso** è molto differente.

Frege è dunque il padre della **filosofia del linguaggio** – esponenti principali: John Langshaw Austin e John Rogers Searle.

Frege inventa la sintassi formale

Frege intende la sua formalizzazione come la realizzazione della *characteristica universalis* di Leibniz, perché dà una nozione precisa di deduzione come strumento efficiente di calcolo: la logica non deve basarsi su se stessa (come Boole), ma deve essere il fondamento della matematica (**programma logicista**).

La regola di inferenza fondamentale di Frege è molto semplice (oggi!):

$$\frac{\begin{array}{l} A. \\ A \subset B. \end{array}}{B.}$$

Oggi il modello di logica di Frege è diventato il modello standard.

Frege e la caratteristica universale di Leibniz

Leibniz voleva anche una *procedura* per determinare se, dato un insieme di premesse, sia *possibile* tirare una conclusione nella logica del *Begriffsschrift*, e Frege non riuscí mai a darlo.

Nel 1902, mentre la seconda edizione delle *Grundgesetze der Arithmetik* stava per andare in stampa, a Frege giunge una lettera da un giovane matematico inglese di nome Bertrand Russell, il quale scrive: ≪there is just one point where I have encountered a difficulty.≫

Frege e la caratteristica universale di Leibniz

Leibniz voleva anche una *procedura* per determinare se, dato un insieme di premesse, sia *possibile* tirare una conclusione nella logica del *Begriffsschrift*, e Frege non riuscí mai a darlo.

Nel 1902, mentre la seconda edizione delle *Grundgesetze der Arithmetik* stava per andare in stampa, a Frege giunge una lettera da un giovane matematico inglese di nome Bertrand Russell, il quale scrive: ≪there is just one point where I have encountered a difficulty.≫

Ma questa parte della storia la vediamo nella prossima puntata sul Novecento: prima dobbiamo parlare di Cantor.

Riprendiamo Frege tra un po'

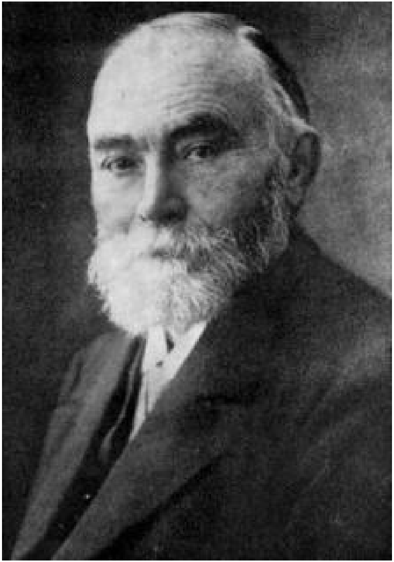

Figura: Friedrich Ludwig Gottlob Frege

Georg Cantor

Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845–1918) nasce a San Pietroburgo da un mercante danese e una musicista russa. Trasferitisi a Berlino nel 1856 a causa della turbercolosi che aveva colpito il padre, Georg studia matematica con Karl Weierstrass, Ernst Kummer e Leopold Kronecker, che diverrà la sua nemesi.

Acquisito il dottorato nel 1867 con una tesi su temi tradizionali dal titolo *De aequationibus secundi gradus indeterminatis*, Cantor diventa *Privatdozent* (lecturer senza stipendio) a Halle, non distante da Jena, dove stava Frege.

Georg Cantor

Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845–1918) nasce a San Pietroburgo da un mercante danese e una musicista russa. Trasferitisi a Berlino nel 1856 a causa della turbercolosi che aveva colpito il padre, Georg studia matematica con Karl Weierstrass, Ernst Kummer e Leopold Kronecker, che diverrà la sua nemesi.

Acquisito il dottorato nel 1867 con una tesi su temi tradizionali dal titolo *De aequationibus secundi gradus indeterminatis*, Cantor diventa *Privatdozent* (lecturer senza stipendio) a Halle, non distante da Jena, dove stava Frege.

Qui Cantor si applica allo studio dell'infinito, a partire dalla serie di Leibniz (che converge in $\frac{\pi}{4}$) e dalle serie trigonometriche.

Figura: Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor

Brevissima storia dell'infinito

I numeri naturali $1, 2, 3, \ldots$, proseguono all'infinito. Che significa? Per Aristotele tale infinito è *potenziale* ma non *attuale*, vale a dire non è legittimato come numero: tutta la scolastica medievale considera l'infinito prerogativa esclusiva di Dio, cioè parte del Mistero.

Leibniz, scopritore del calcolo infinitesimale, ammette l'infinito come strumento della Natura per mostrare le perfezioni del suo Autore. Gauss (1777–1855) ancora ammoniva (in Davis 2000:60):

> *Io protesto sopratutto contro l'uso di una quantità infinita in quanto completa, che in matematica non è mai permessa. L'infinito è solo un modo di dire, quando si parla propriamente di limiti.*

La dimostrazione di Leibniz

In una lettera in risposta a Nicolas Malebranche sul problema della completezza dell'infinito, Leibniz dice: in un teatro pieno con nessuna persona in piedi, non dobbiamo contare gli spettatori, ma ci basta sapere il numero di sedie del teatro.

Lo stesso con l'infinito: poiché è possibile una corrispondenza uno-a-uno tra l'infinito dei numeri naturali e l'infinito dei numeri pari, questi sono lo stesso (Davis 2000:64):

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ 2 & 4 & 6 & 8 & \ldots \end{array}$$

Cantor prova a estendere i risultati di Leibniz

Cantor prova facilmente che la corrispondenza uno-a-uno tra numeri naturali e numeri frazionari è ancora valida (Davis 2000:66):

$$\begin{array}{cccccc} \frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{2}{1} & \frac{1}{3} & \frac{2}{2} & \dots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots \end{array}$$

Questo perché le frazioni sono numeri *razionali*. Lo stesso vale con i numeri *irrazionali algebrici* (es. $\sqrt{2}, \sqrt[3]{2}$). Ma vale per qualsiasi numero reale?

Cantor sottopone la questione in una lettera a Richard Dedekind, un giovane matematico allievo di Kummer, incontrato in una vacanza in Svizzera, ma questi la trova irrilevante.

Ci sono almeno due grandezze di infinito

Una settimana dopo, Cantor scrive nuovamente a Dedekind, mostrandogli che *non* è possibile trovare una corrispondenza uno-a-uno tra numeri naturali e numeri reali, ergo esistono almenso due grandezze di infinito.

Incoraggiato a proseguire, Karl Weierstrass lo convince a pubblicare il risultato nel giornale della neonata *Deutsche Mathematiker-Vereinigung* (1890).

Viene spiegato in sole quattro pagine, ripubblicate qui (con traduzione inglese): `http://uk.geocities.com/frege@btinternet.com/cantor/diagarg.htm`. La prova si basa su una nozione ingenua di insieme (quella formale verrà fornita solo nel 1908 da Ernst Zermelo).

Numeri ordinali, numeri cardinali

I numeri naturali vengono usati nel parlato in due modi differenti:

- Ci sono *quattro* persone nella stanza.
- Il cavallo di Joe è arrivato *quarto*.

La parola *quattro* viene detta numero **cardinale** (quanti sono?), mentre la parola *quarto* presuppone un particolare ordine, e viene detta quindi numero **ordinale**.

Il concetto di cardinalità degli insiemi

Cantor associa a ogni insieme (finito o infinito) un **numero cardinale** ($\overline{\overline{M}}$), indipendente dalla natura dell'insieme (M).
Esempi (Davis 2000:69):

$A = \{\clubsuit\diamondsuit\heartsuit\spadesuit\}, B = \{3, 6, 7, 8\}, C = \{6, 5\}$

Quale sarà la loro cardinalità?

Il concetto di cardinalità degli insiemi

Cantor associa a ogni insieme (finito o infinito) un **numero cardinale** ($\overset{=}{M}$), indipendente dalla natura dell'insieme (M). Esempi (Davis 2000:69):

$A = \{\clubsuit\diamondsuit\heartsuit\spadesuit\}, B = \{3, 6, 7, 8\}, C = \{6, 5\}$

Quale sarà la loro cardinalità?

$\overset{=}{A} = \overset{=}{B} = 4;$

$\overset{=}{C} = 2.$

I numeri transfiniti e l'ipotesi del continuo (CH)

Se gli insiemi sono *infiniti*, Cantor chiama i corrispondenti numeri cardinali **numeri transfiniti**. La cardinalità dei numeri naturali è la piú piccola. Cantor la chiama $\aleph_0$ (Aleph-con-zero: usa la prima lettera dell'alfabeto ebraico perché le altre sono già state abusate).

La cardinalità dei numeri reali (detti anche: *continuum*) Cantor la chiama $\mathbb{C}$ e suppone che non esista numero cardinale tra $\aleph_0$ e $\mathbb{C}$. Cercherà tutta la vita di dimostrarlo ma invano.

I numeri transfiniti e l'ipotesi del continuo (CH)

Se gli insiemi sono *infiniti*, Cantor chiama i corrispondenti numeri cardinali **numeri transfiniti**. La cardinalità dei numeri naturali è la piú piccola. Cantor la chiama $\aleph_0$ (Aleph-con-zero: usa la prima lettera dell'alfabeto ebraico perché le altre sono già state abusate).

La cardinalità dei numeri reali (detti anche: *continuum*) Cantor la chiama $\mathbb{C}$ e suppone che non esista numero cardinale tra $\aleph_0$ e $\mathbb{C}$. Cercherà tutta la vita di dimostrarlo ma invano.

Dopo i risultati di Kurt Gödel (1938) e Paul Cohen (1963) sappiamo che detta ipotesi, nota come **ipotesi del continuo (Continuum Hypothesis, CH)** non è dimostrabile con i metodi matematici ordinari.

Il metodo diagonale 1/3

La prima prova che $\aleph_0 < \mathbb{C}$ Cantor la pubblica nel 1874, usando la teoria dei limiti come definita dal suo maestro Weierstrass.

Per tentare di dimostrare la CH, Cantor ottiene la stessa conclusione $\aleph_0 < \mathbb{C}$ usando solo la logica con quello che sarà noto in seguito come **metodo diagonale**, di importanza fondamentale per l'informatica (di qui, Davis 200:74–76).

Consideriamo un insieme **etichettato** come un pacco postale, dove l'etichetta è un *possibile* elemento dell'insieme.

Siano gli elementi i semi delle carte: $\clubsuit\diamondsuit\heartsuit\spadesuit$.

Il metodo diagonale 2/3

Siano:

$$\begin{array}{cccc}
\clubsuit & \diamondsuit & \heartsuit & \spadesuit \\
\updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\
\{\diamondsuit\heartsuit\} & \{\diamondsuit\spadesuit\} & \{\diamondsuit\heartsuit\spadesuit\} & \{\spadesuit\diamondsuit\}
\end{array}$$

Rappresentiamo lo stesso con una tabella: le etichette nella colonna verticale mostrano le quattro etichette, mentre i contenuti possibili sono nelle righe orizzontali. Con $+$ indichiamo quando l'etichetta è elemento del pacco, con $-$ quando non lo è.

	$\clubsuit$	$\diamondsuit$	$\heartsuit$	$\spadesuit$
$\clubsuit$	$-$	$+$	$+$	$-$
$\diamondsuit$	$-$	$+$	$-$	$+$
$\heartsuit$	$-$	$+$	$+$	$+$
$\spadesuit$	$+$	$+$	$-$	$-$

Il metodo diagonale 3/3

Ora, evidenziamo la **diagonale** della tabella.

	$\clubsuit$	$\diamondsuit$	$\heartsuit$	$\spadesuit$
$\clubsuit$	$\ominus$	$+$	$+$	$-$
$\diamondsuit$	$-$	$\oplus$	$-$	$+$
$\heartsuit$	$-$	$+$	$\oplus$	$+$
$\spadesuit$	$+$	$+$	$-$	$\ominus$

Possiamo scrivere una nuova tabella dove i segni sono l'**inverso** della diagonale:

	$\clubsuit$	$\diamondsuit$	$\heartsuit$	$\spadesuit$
	$+$	$-$	$-$	$+$

Il nostro nuovo pacchetto è $\{\clubsuit\spadesuit\}$, e siamo sicuri che è *diverso* dai pacchetti di partenza.

Il paradiso di Cantor

Se ai pacchetti sostituiamo insiemi infiniti le cose non cambiano: il metodo diagonale vale in generale. Cantor scopre allora che *esistono* numeri transfiniti superiori a $\aleph_0$ e $\mathbb{C}$. Egli chiama il numero transfinito ordinale a partire dalla terza classe $\aleph_2$ con l'ultima lettera greca ω_1.

Si accorge ben presto che la torre di infiniti non ha mai fine: $\aleph_3, \aleph_4, \ldots$ fino a $\aleph_\omega$!

Cantor aveva esplorato un campo che nessuno prima aveva mai visto, dove non c'erano regole matematiche sulle quali basarsi: lo guidava solo l'intuizione. Dopo il 1899 il suo equilibrio psichico comincia a vacillare.

La vita di Cantor nel primo Novecento

L'incapacità di dimostrare la CH e la lettera di Russell a Frege (v. oltre) gettano Cantor in depressione. Abbandona la matematica, e si occupa della paternità delle opere di Shakespeare (che attribuisce a Francis Bacon).

Il suo equilibrio viene minato per sempre dalla tragedia della morte del figlio tredicenne. Cantor viene ricoverato sempre piú spesso in ospedale finché moure di infarto nel 1918.

Cantor, gli infiniti, e Dio

Negli ultimi anni si occupa di religione, riprende e attualizza le idee leibniziane di Dio e della Natura:

> *L'infinito attuale si presenta in tre contesti: in primo luogo quando si realizza nella forma piú completa, in un'essenza mistica completamente indipendente, in Deo, che io chiamo Infinito Assoluto o, semplicemente, Assoluto; in secondo luogo quando si realizza nel mondo contingente, creato; in terzo luogo quando la mente lo coglie in abstracto come una grandezza, un numero o un tipo di ordine matematico.*

Reazioni alla scoperta di Cantor

Kronecker, già suo maestro, lo osteggia per tutta la vita, fatto che contribuisce a destabilizzarlo.

Frege capisce che una tempesta si stava scatenando per colpa di Cantor, e scagliò il suo anatema su tutti i matematici che abbracciavano la sua teoria degli insiemi (in Davis 2000:60):

> *L'infinito verrà alla fine rifiutato dall'aritmetica [...] Si può prevedere che questa questione sarà il banco di prova per una battaglia di grande importanza, decisiva.*

Reazioni alla scoperta di Cantor

Kronecker, già suo maestro, lo osteggia per tutta la vita, fatto che contribuisce a destabilizzarlo.

Frege capisce che una tempesta si stava scatenando per colpa di Cantor, e scagliò il suo anatema su tutti i matematici che abbracciavano la sua teoria degli insiemi (in Davis 2000:60):

> *L'infinito verrà alla fine rifiutato dall'aritmetica [...] Si può prevedere che questa questione sarà il banco di prova per una battaglia di grande importanza, decisiva.*

Il risultato – del tutto inatteso – di questa battaglia sarà la macchina astratta di Alan Turing.

Grazie. Domande?

Potete scaricare questa presentazione qui:

`http://www.slideshare.net/goberiko/`